



**DOSSIER DE CANDIDATURE  
POUR THESE EN COTUTELLE  
POUR LA RENTREE 2023  
FINANCEMENT : BOURSE**

Dossier complété et revêtu des signatures à transmettre impérativement pour le :  
**20 mars 2023 au plus tard.**

A la Direction de la Recherche et Valorisation  
[secretariat.recherche@univ-littoral.fr](mailto:secretariat.recherche@univ-littoral.fr)

**Titre de la thèse :** Etude de valeurs propres du modèle de Rabi

**Laboratoire d'accueil ULCO :** LMPA Joseph Liouville

**Directeur de thèse ULCO :** Lech ZIELINSKI

**Directeur de thèse Partenaire :** Ali WEHBE

**e-mail :** ali.wehbe@ul.edu.lb

**Merci de fournir une attestation de financement du partenaire (celle-ci peut-être conditionnée au cofinancement ULCO)**

**Si nouveau partenariat (absent ci-dessous) merci de nous indiquer l'université d'origine, le directeur de thèse, le laboratoire, ainsi que les conditions de financement du doctorant dans le pays d'origine**

**X LIBAN - Université Libanaise (2 financements)**

Pour ce dispositif, merci d'indiquer en plus :

- le nom du codirecteur étranger et le laboratoire partenaire :

Pr Ali WEHBE, Khawarizmi Laboratory of Mathematics and Applications-KALMA, Hadath-Beirut

- Thématique :

- (1) La qualité de l'air
- (2) Le milieu aquatique
- (3) L'obésité, la nutrition et les activités sportives,
- (4) Les énergies propres et renouvelables
- (5) La gestion et le traitement des déchets
- (6) L'urbanisme



**□ LIBAN - CNRS Libanais (4 financements)**

Pour ce dispositif, merci d'indiquer en plus :

- le nom du codirecteur étranger et le laboratoire partenaire

- Thématique :

- (1) La qualité de l'air
- (2) Le milieu aquatique
- (3) L'obésité, la nutrition et les activités sportives
- (4) Les énergies propres et renouvelables
- (5) La gestion et le traitement des déchets
- (6) L'urbanisme

**□ MAROC - Université Hassan II / HESTIM (UH2C) (4 financements)**

- Thématique :

- (1) Economie Gestion
- (2) Sciences et Technologies

**□ MAROC - Université Mohammed V (4 financements)**

- Thématique :

- (1) Environnement, Milieux Littoraux Marins
- (2) Sciences et technologie
- (3) Santé
- (4) Sciences Humaines et Sociales

**□ MAROC - Université Mohammed VI**

- Thématique :

- (1) Mathématiques Appliquées, Sciences de Données
- (2) Sciences de l'Ingénieur (informatique, traitement du signal et de l'industrie 4.0)
- (3) Ingénierie des systèmes complexes

**□ BELGIQUE - UCLOUVAIN - Université Catholique de Louvain (2 financements)**

- Thématique :

- (1) Economie Gestion

**□ CANADA - UQAR : Université du Québec à Rimouski ( 1 financement)**

- Thématique :

- (1) Sciences de la Mer



### **\*LABORATOIRE D'ACCUEIL**

Nom du laboratoire d'accueil : LMPA Joseph Liouville

Nombre de HDR dans le laboratoire : 17

Nombre de thèses encadrées dans le laboratoire (rentrée 2022) : 11 + 4 en cours d'inscriptions

Cotutelles en cours au sein du laboratoire : 5

Durée moyenne des thèses soutenues dans le laboratoire, sur la période 2018-2022 : entre 3,5 et 4 ans

### **ENCADREMENT**

Nom, Prénom du directeur de laboratoire : ROSIER Carole

Nom, Prénom du directeur de thèse (si différent du directeur de laboratoire) : ZIELINSKI Lech

Nombre de doctorats en préparation sous la direction du directeur de thèse : 0

Avis détaillé du directeur de thèse :

Le sujet de cette thèse fait partie d'un projet de recherches que je mène au sein du laboratoire Joseph Liouville en collaboration avec Anne Boutet de Monvel (Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive gauche). Le but de ce projet global est de développer de nouveaux outils mathématiques permettant d'améliorer et généraliser les estimations de valeurs propres d'opérateurs en provenance de la physique mathématique. Ces recherches ont donné lieu à une dizaine de publications dans des revus scientifiques à comité de lecture, dont trois qui ont fait partie des thèses de doctorat. Grâce aux avancées déjà réalisées dans le cadre de ce projet, le sujet est parfaitement susceptible de donner matière à une thèse de qualité dans le délai requis de trois ans.

Signature du directeur de thèse

A handwritten signature in blue ink, consisting of several stylized, overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right.



Avis détaillé du directeur de laboratoire : Ce projet de thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration de longue date entre Lech Zielinski et Anne Boutet de Monvel (Paris) sur l'étude spectral d'opérateurs issus de la physique quantique. Il s'inscrit aussi dans la continuité d'une thèse co-dirigée par Lech Zielinski et en cotutelle avec l'Université Libanaise (soutenue en décembre 2022 à l'ULCO) qui a donné lieu à des résultats très fins sur l'étude des valeurs propres des opérateurs auto-adjoints définis par le modèle quantique de Rabi. C'est au cours de cette soutenance de thèse que les 2 co-directeurs de ce projet de thèse ont projeté d'étendre les résultats obtenus au modèle de Rabi plus général où l'interaction contient en plus un terme d'interaction avec deux photons et un biais statique. Je soutiens totalement ce projet de recherche qui fait partie d'une thématique phare que la composante « analyse » de l'équipe EMA développe depuis longtemps. Par ailleurs, il permettrait de renforcer voire pérenniser la collaboration entre le LMPA et le laboratoire de Mathématiques et Applications de Beirut.

Signature du directeur de laboratoire

## PROJET DE THESE

Intitulé du projet de thèse : Etude de valeurs propres du modèle de Rabi

Domaine scientifique : Mathématiques et leurs interactions

Résumé : Le modèle de Rabi est le plus simple modèle de l'interaction entre la matière et le rayonnement électromagnétique. Il s'agit d'un modèle fondamental étant l'objet de nombreuses recherches dans les domaines variés de la physique théorique et expérimentale, comme par exemple l'optique de cavités, la théorie de semi-conducteurs nanostructurés, des circuits supraconducteurs, des ions piégés et l'informatique quantique. Ce sujet de thèse propose d'étudier le comportement asymptotique de valeurs propres des opérateurs liés au modèle de Rabi. L'un de ses objectifs est d'obtenir une formule asymptotique pour les grandes valeurs propres avec une estimation du reste suffisamment précise pour justifier l'approche connue en physique sous le nom de l'approximation généralisée de l'onde tournant (generalized rotating-wave approximation). Un résultat de ce type a été obtenu pour le modèle de Rabi de base où le système à deux niveaux interagit avec un seul mode du champ quantique par l'intermédiaire d'un seul photon. Dans le cadre de cette thèse on propose de mener des recherches sur le modèle de Rabi plus général où l'interaction contient en plus un terme d'interaction avec deux photons et un biais statique.

**Développer sur cinq pages :**

### **Le sujet de recherche choisi et son contexte scientifique**

Ce sujet propose d'étudier les opérateurs définis par certains modèles quantiques de Rabi. Il s'agit des opérateurs auto-adjoints dont le spectre est discret et les valeurs propres correspondent aux niveaux d'énergie de l'hamiltonien. Les niveaux d'énergie peuvent être mesurés



expérimentalement et des renseignements sur les valeurs propres du modèle théorique permettent de tester sa validité ou de retrouver les paramètres du modèle testé dans une expérience donnée. Des formules explicites pour les valeurs propres sont connues uniquement dans certains cas particuliers et des nombreux travaux physiques proposent des méthodes divers pour approcher les valeurs propres en question (voir les références [1] et [2]).

Du point de vue mathématique, il est naturel de poser la question du comportement asymptotique de grandes valeurs propres. En ce qui concerne le comportement de grandes valeurs propres du modèle de Rabi, le premier résultat mathématique a été démontré par E. A. Yanovich. Il s'agit de la formule asymptotique à deux termes obtenue dans la référence [3]. Enfin, la référence [4] contient une preuve de la formule asymptotique à trois termes pour ce modèle.

Il s'avère (voir la référence [5]) qu'en utilisant la formule asymptotique à trois termes, il est possible de reconstruire les paramètres du modèle à partir du spectre du modèle de Rabi en question. De plus, les trois termes de cette formule décrivent le comportement asymptotique de l'approximation généralisée de l'onde tournant (generalized rotating-wave approximation) pour ce modèle. Depuis le célèbre article de E. K. Irish (voir la référence [2]), l'approximation généralisée de l'onde tournant est une approche utilisée par des nombreux physiciens travaillant avec le modèle de Rabi, mais l'idée analogue avait été déjà utilisée par I. D. Feranchuk, I. I. Komarov, A. P. Ulyanenko (voir la référence [1]) sous le nom de l'approximation d'ordre zéro de la théorie de perturbations d'opérateurs.

L'un des objectifs de ce sujet est d'obtenir des résultats analogues pour des modèles de Rabi plus généraux. Entre autres, on propose d'améliorer et généraliser les résultats obtenus dans la référence [7]. Pour cela on utilise une approximation de l'évolution de Schrödinger associée à des opérateurs pseudodifférentiels à coefficients périodiques. Une autre direction de recherches consiste à étudier la théorie de la perturbation en fonction de la constante de couplage pour des modèles plus généraux que les modèles considérés dans la référence [6].

On suppose que le candidat possède une bonne connaissance de notions de base de l'analyse fonctionnelle telles que l'espace de Hilbert des suites de carré sommables, séries de Fourier, opérateurs linéaires bornés et compacts.

#### Références :

[1] I. D. Feranchuk, I. I. Komarov, A. P. Ulyanenko, Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method, *J. Phys. A: Math. Gen.* Vol. 29 (1996), 4035-4047

[2] E. K. Irish, Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling, *Physical Review Letters* 99 (2007), no. 17.

[3] E. A. Yanovich, Asymptotics of Eigenvalues of an Energy Operator in a Problem of Quantum Physics. In: Janas J., Kurasov P., Laptev A., Naboko S. (eds) *Operator Methods in Mathematical Physics. Operator Theory: Advances and Applications*, vol 227 (2013), Birkhäuser, Basel



[4] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, Oscillatory Behavior of Large Eigenvalues in Quantum Rabi Models, *International Mathematics Research Notices*, 2021, no. 7, 5155–5213, DOI : 10.1093/imrn/rny294 et [arXiv:1711.03366](https://arxiv.org/abs/1711.03366) (2017)

[5] A. Boutet de Monvel, L. Zielinski, On the spectrum of the quantum Rabi model. In: Kurasov, P., Laptev, A., Naboko, S., Simon, B. (eds), *Analysis as a Tool in Mathematical Physics, in Memory of Boris Pavlov, Operator Theory: Advances and Applications*, vol 276, Birkhäuser, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-31531-3\_13

[6] M. Charif, L. Zielinski, Perturbation series for Jacobi matrices and the quantum Rabi model, *Opuscula Math.* 41, no. 3 (2021), 301-333, DOI: 10.7494/OpMath.2021.41.3.301

[7] A. Boutet de Monvel, M. Charif, L. Zielinski, Behaviour of large eigenvalues for the two-photon asymmetric quantum Rabi model, *Algebra and Analysis* vol. 35:1 (2023)

#### **📄 *L'état du sujet dans le laboratoire et l'équipe d'accueil***

Le sujet de cette thèse fait partie d'un projet de recherches mené au sein du laboratoire Joseph Liouville en collaboration avec Anne Boutet de Monvel (Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive gauche). Ces recherches ont donné lieu à plusieurs communications orales pendant des congrès scientifiques internationaux et à une dizaine de publications dans des revues scientifiques à comité de lecture. En particulier, dans le cadre de ce projet, une publication a fait partie de la thèse de doctorat de A. Harrat (soutenue à l'ULCO le 17 décembre 2020) et deux publications ont fait partie de la thèse de doctorat de M. Charif (soutenue à l'ULCO le 14 décembre 2022).

#### **📄 *Le programme et l'échéancier de travail***

Au cours de la première année de la thèse le candidat devra faire connaissance avec tous les travaux qui ont été publiés dans le domaine de recherches qui concerne la thématique de la thèse. Au cours de la deuxième année de la thèse, le candidat devra réaliser un travail de recherche en vue de la publication d'au moins un article de recherche dans une revue scientifique à comité de lecture. Les résultats principaux de ce travail devront être rédigés et soumis à publication à la fin de la deuxième année de la thèse. Au cours de la troisième année de la thèse, le candidat devra préparer la rédaction finale de sa thèse et soumettre ses résultats à publication.

#### **📄 *Les retombées scientifiques et économiques attendues***



On attend la publication d'au moins trois articles de recherche dans des revues scientifiques à comité de lecture ainsi que la possibilité de donner plusieurs communications orales pendant des congrès scientifiques nationaux et internationaux. Un projet en cours est de rédiger également une monographie consacrée aux résultats obtenus au cours de travaux menés dans ce domaine au sein du laboratoire Joseph Liouville.

#### **📄 Collaborations prévues**

On prévoit de continuer la collaboration avec Anne BOUTET DE MONVEL (Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive gauche), Ayoub HARRAT (ATER à l'Université Paul Sabatier, Toulouse) et Mirna CHARIF (ATER à l'Université d'Artois, Lens).

