

مباراة الدخول للعام الجامعي 2020-2021

مدة الامتحان: ساعة

مسابقة في الرياضيات

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = |\ln(x - 2)| + (x - 4)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

1. Trouver le domaine de définition de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et déterminer une asymptote à (C_f) .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f(3)$.
4. Déterminer l'expression de la fonction $g_1(x) = f(x)$ pour $2 < x \leq 3$ puis l'expression de la fonction $g_2(x) = f(x)$ pour $x \geq 3$.
5. Déterminer $g_1'(x)$.
6. On note (C_{g_1}) la courbe représentative de $g_1(x)$ dans $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Trouver l'équation de la tangente (T_1) à (C_{g_1}) au point d'abscisse $x = 3$.
7. Déterminer $g_2'(x)$.
8. On note (C_{g_2}) la courbe représentative de $g_2(x)$ dans $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Trouver l'équation de la tangente (T_2) à (C_{g_2}) au point d'abscisse $x = 3$.
9. Comparer $g_1'(3)$ et $g_2'(3)$. Déduire si f est dérivable en $x = 3$.
10. Dresser le tableau de variation de g_1 .
11. Montrer que l'équation $g_1(x) = 0$ admet une solution unique α_1 et vérifier que $2.1 < \alpha_1 < 2.2$.
12. Dresser le tableau de variation de g_2 .
13. Montrer que l'équation $g_2(x) = 0$ admet une solution unique α_2 et vérifier que $3.5 < \alpha_2 < 3.6$.
14. Afin de déduire le graphe de (C_f) , tracer sur le même graphe (C_{g_1}) et (T_1) puis (C_{g_2}) et (T_2) .

Exercice 2.

Un joueur dispose d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1 , U_2 et U_3 contenant chacune n boules, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note que l'urne U_1 contient 3 boules noires, l'urne U_2 contient 2 boules noires et l'urne U_3 contient 1 boule noire.

Quand le joueur lance le dé :

- S'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1 , note sa couleur et la remet dans U_1 .
- S'il obtient 3 ou 6, il prend au hasard une boule dans U_2 , note sa couleur et la remet dans U_2 .
- Si le numéro amené par le dé n'est ni 1, ni 3 et ni 6, il prend au hasard une boule dans U_3 , note sa couleur et la remet dans U_3 .

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

- A : « Le dé amène le numéro 1 ».
- B : « Le dé amène 3 ou 6 ».
- C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1, ni 3 et ni 6 ».
- N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Calculer $P(N|C)$.

b. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3n}$.

c. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

d. Déterminer n pour que la probabilité d'obtenir une boule blanche soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

e. Déterminer n pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, n est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 2 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.