Université Libanaise

Faculté d'Information

Concours d'entrée 2023-2024

Examen de Maths – durée : 1h30

<u>Résoudre les questions suivantes :</u>

Problème 1 (50 points):

Partie A.

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau.
4) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - \ln(2)$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (d).
5) Tracer (C).
6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]0\ ;\ +\infty[$ une solution unique α et tel que $1 < \alpha < \frac{5}{4}$

Partie B.

Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$.

On désigne par (γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ et en déduire une asymptote à (γ).
2) Etudier les variations de g et dresser son tableau.
3) Tracer (γ).
4) Montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$
5) Montrer que si $x \in \left[1;\frac{5}{4}\right]$, alors $g(x) \in \left[1;\frac{5}{4}\right]$
6) Etudier les variations de g' et montrer que pour tout $x \in \left[1;\frac{5}{4}\right]$ alors $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Problème 2 (25 points) :

Une urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.

Une urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.

On tire au hasard et simultanément deux boules de U_1 et une boule de U_2 et on obtient ainsi trois boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1) On désigne par E l'évènement suivant :
   « Parmi les trois boules tirées il y a exactement deux boules blanches »
   Montrer que $P(E) = \frac{9}{20}$.
2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.
   a. Déterminer les valeurs possibles.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X
3) Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré deux boules blanches.

Problème 3 (25 points):

Le tableau ci-dessous donne la consommation en litres d'alcool pur par habitant âgé de 15 ans et plus, sur le territoire français entre 1998 et 2004.

Années	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Quantités	14.6	14.4	14	14.2	13.9	13.4	13.1

1) Calculer le taux d'évolution de la consommation entre 2000 et 2001.
2) Sur une feuille de papier millimétré, construire le nuage de points de cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques : 1 cm pour une année en abscisse, 2 cm pour 1 L d'alcool pur en ordonnée. Les axes seront gradués à partir de 1996 en abscisse, et de 10 en ordonnée.
3) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage.
4) On considère les points A et B de coordonnées respectives (1999 ; 14,4) et (2003 ; 13,4).
   a) Tracer la droite (AB).
   b) Déterminer une équation de la droite (AB) en arrondissant au centième le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
   c) Le point G est-il sur cette droite ?
5) En considérant l'allure du nuage de points, on estime que l'évolution de la quantité d'alcool pur consommé est modélisée jusqu'en 2010 par la fonction affine dont la droite (AB) est une représentation graphique.
   a) Quelle consommation peut-on alors prévoir pour 2008 ?
   b) L'objectif pour 2008 est d'obtenir une baisse de 20 % par rapport à la quantité absorbée en 1998. Avec cet ajustement, l'objectif peut-il être atteint ?